الأستاذ بن شعبانة عبد الحكيم
مجموعة ابن البناء المراكشي

مبرهنة كنتور

من أجل كل مجموعتين غير خاليتين

$$A , B$$

إذا وجد تباين من الأولى نحو الثانية و وجد تباين من الثانية نحو الأولى **فيوجد تطبيق تقابلي بينهما**

سميت هذه المبرهنة بمبرهنة كنتور برنشتاين ذلك أن كنتور أعطى برهانا يستعمل مسلمة الاختيار ثم قام برنشتاين بإعطاء برهان آخر لا يستعملها.

سنقدم أحد البراهين لها وذلك عن طريق التوطئة التالية :

توطئة

لنعتبر مجموعة E ومجموعة أجزائها ولنفرض أنه لدينا تطبيق g من مجموعة الأجزاء نحو نفسها بحيث هذا التطبيق متزايد :

$$g : P(E) \to P(E)$$

التطبيق المتزايد بمفهوم المجموعات هو التطبيق الذي يحقق

$$A \subset B \Rightarrow g(A) \subset g(B)$$

إذا حقق التطبيق ذلك **فهو يقبل نقطة صامدة** أي توجد مجموعة بحيث

$$g(M) = M$$

برهان التوطئة
لنعرف المجموعة التالية

$$X = \{A \in P(E) : A \subset g(A)\}$$

بما أن المجموعة الخالية تحقق

$$\emptyset \subset g(\emptyset)$$

فهي تنتمي ل X إذن X غير خالية.

لنصنع اتحاد مجموعات X فنضع

$$C = \bigcup M \, , \, M \in X$$

بما أن

$$\forall M \in X : M \subset g(M)$$

فنستنتج أن

$$\bigcup M \subset \bigcup g(M) \quad \ldots \text{(1)}$$

لكن كون g متزايدة نستنتج منه أن

$$M \subset C \Rightarrow g(M) \subset g(C)$$

ومنه

$$\bigcup g(M) \subset g(C) \ \ldots \text{(2)}$$

من 1 و 2 نستنتج

$$C \subset g(C) \ \ldots \text{(3)}$$

إذن C تنتمي ل X

نطبق كون g متزايدة فيكون لدينا

$$C \subset g(C) \Rightarrow g(C) \subset g(g(C))$$

لكن هذا يعني أنه

$$g(C) \in X$$

إذن هي محتوات في C لأنها اتحاد مجموعات X

$$g(C) \subset C \ \ldots \text{(4)}$$

إذن من 3 و 4 نجد نقطتنا الصامدة

$$g(C) = C$$

برهان مبرهنة كنتور - برنشتاين

لنفرض أنه لدينا تباين f من A نحو B وتباين h من B نحو A.

نحن نعلم أن f يصبح تقابلي إذا جعلناه من A نحو f(A)

وعموما يصبح تقابلي من مجموعة E نحو f(E)

ونفس الشيء يقال على h

الفكرة هي أن نقصر f على مجموعة E بحيث تتمة E في A أي A\E هي صورة كذلك للجزء المتمم من B بواسطة h أي

$$h(B \setminus f(E)) = A \setminus E$$

عندها يكون f تقابلي من E نحو صورة E و h تقابلي من تتمة صورة E ب f نحو تتمة E في A.

فيمكننا أن نعرف تطبيق تقابلي k كالتالي:

$$k(x) = f(x)\ ,\ x \in E$$

$$k(x) = h^{-1}(x) : x \in A \setminus E$$

إذن نحتاج أن يكون h تقابلا بين **B\f(E)** و **A\E** حتى نستطيع استعمال h^-1

أي نحتاج

$$h(B \setminus f(E)) = A \setminus E$$

كي نكمل به ما تبقي من الصور التي لا يغطيها f.

المساواة السابقة تعني أن

$$A \setminus h(B \setminus f(E)) = E$$

لكن هذا يعرف تطبيق على مجموعات أجزاء المجموعة A أي من أجل كل مجموعة M لدينا

$$g(M) = A \setminus h(B \setminus f(M))$$

وهذا التطبيق بتعريفه متزايد فهو يقبل نقطة صامدة إذن توجد مجموعة E يحقق عندها g(E) = E أي

$$A \setminus h(B \setminus f(E)) = E$$

وهو المطلوب لكي نعرف التطبيق التقابلي k.